

全国高校数学微课程教学设计竞赛



全国高校数学微课程教学设计竞赛

知识点名称： n 维向量空间 (线性代数)

知识点编号：04010

内容提要

— 1. 问题引入 论 n 维空间？

2. 探究新知

3. 深入挖掘

4. 总结拓展

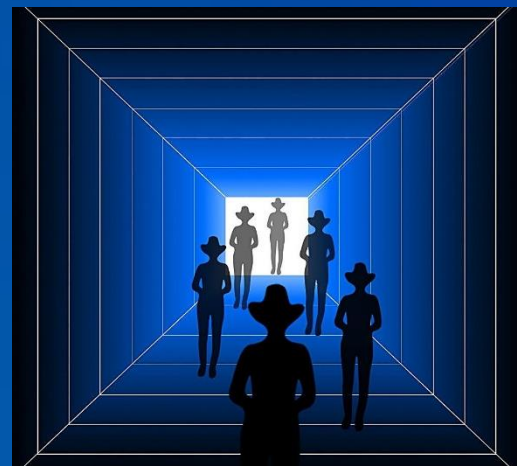


$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$$

1. 问题的引入

● 思想实验：

井底之蛙 → 平面之蛙 → 三维空间中的我们

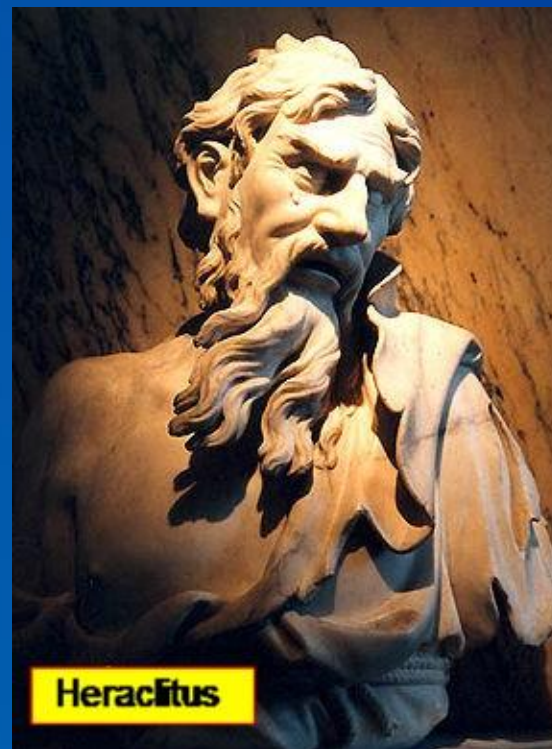


$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$$

- 认知4维空间：

- 古希腊哲学家赫拉克利特
(Heraclitus)

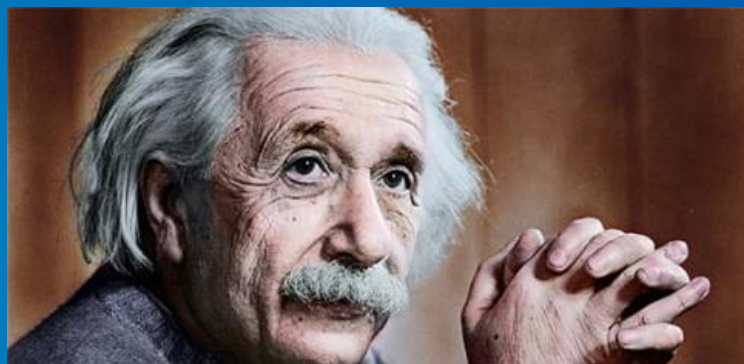
“人不能两次踏进同一条河流！”



Heraclitus

- 认知4维空间：

- 物理学大师爱因斯坦
(A. Einstein)



“相对论”中的4维世界观



- 物理学大师霍金
(S. Hawking) 等



11维的宇宙模型

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$$

● 思想实验 (续): 认知更高维的空间是否容易?

莫比乌斯带:

2维对象在3维空间
中扭曲所得.

(实际道具展示)



$$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$$



(电影<星际穿越>图片)

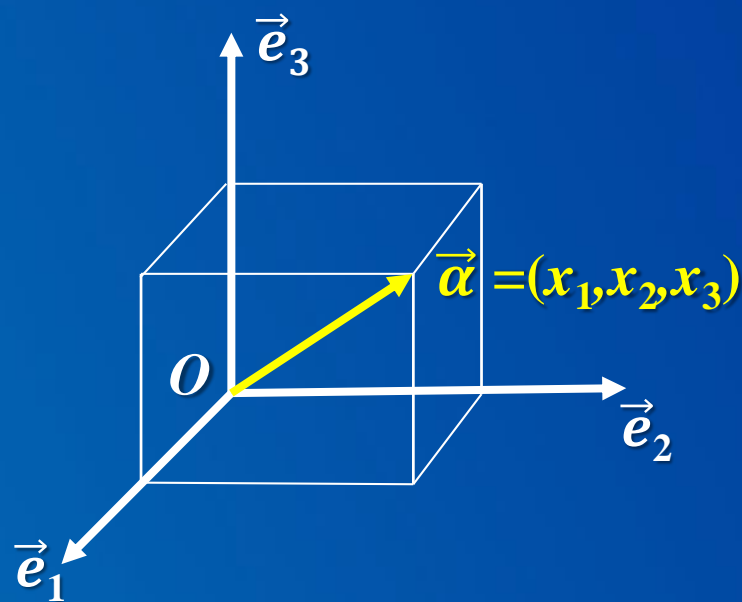
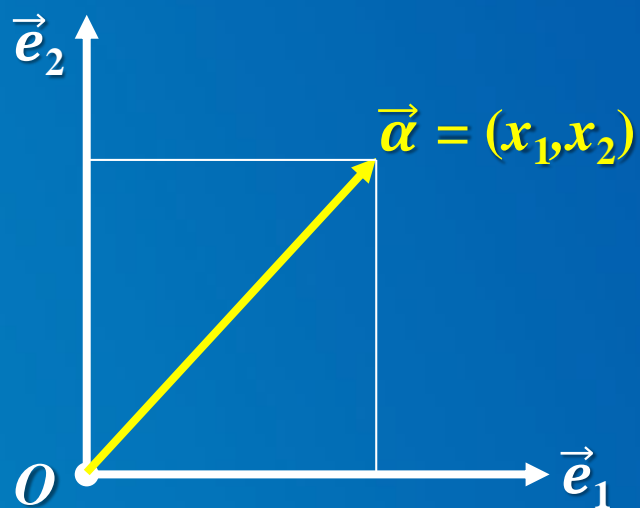
面对神秘的高维空间，我们真的就一筹莫展了吗？

A FILM BY CHRISTOPHER NOLAN

INTERSTELLAR

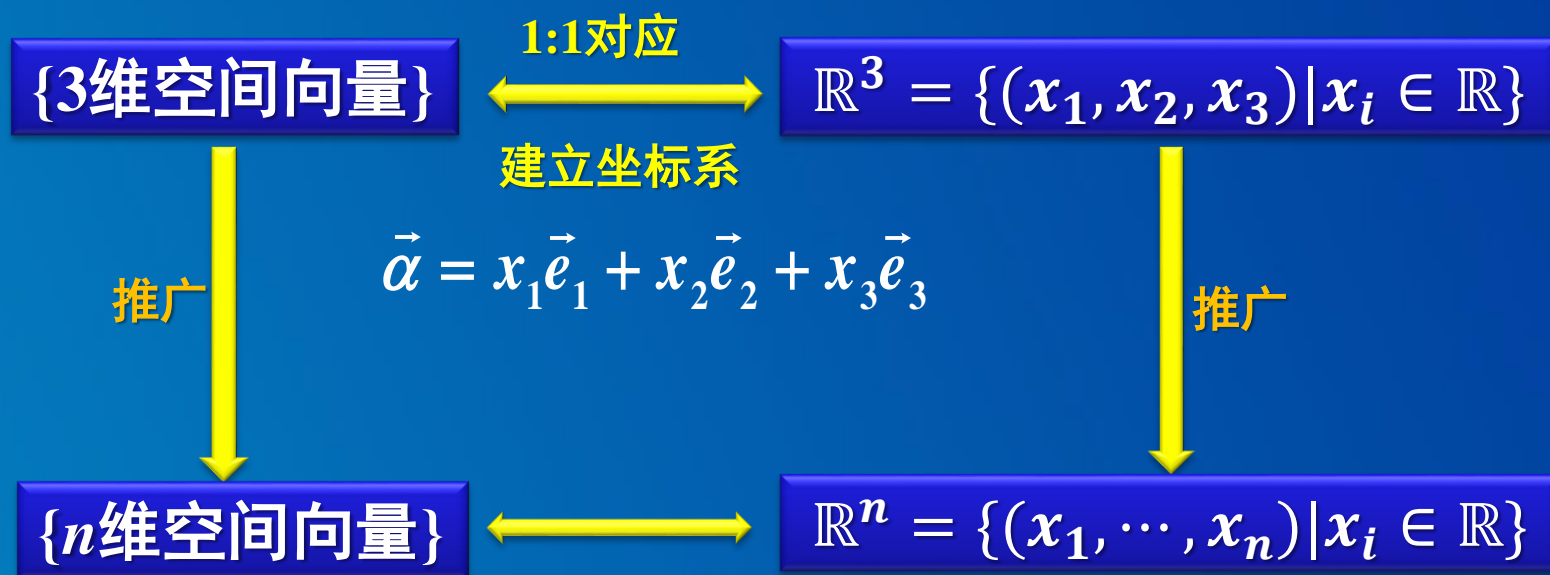


复习: 二维, 三维空间的表示方法



$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$$

复习: 二维, 三维空间的表示方法



- **几何方面:**
很难做出图形

- **代数方面:**
很容易推广到 n 元有序数组.

内容提要

1. 问题引入 —— 为什么要讨论 n 维空间？

—— 2. 向量空间与运算

3. 深入挖掘

4. 总结拓展



$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$$

2.1 n 维向量的概念

定义1 设 \mathbb{R} 是实数集, n 个数 $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, 组成的有序数组 (a_1, a_2, \dots, a_n) 称为 **n 维向量**, 记作

$$\vec{\alpha} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \quad \text{或} \quad \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

其中 a_i 称为向量的第 i 个**分量**. 前一个表达式称为**行向量**, 后一个称为**列向量**. 一般用带箭头的字母表示一个向量, 且默认为列向量.

如果向量的所有分量都是0, 就称其为**零向量**, 一般记作 $\vec{0}$.

例1 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\alpha}_1 \\ \vec{\alpha}_2 \\ \vec{\alpha}_3 \end{pmatrix} = (\vec{\beta}_1 \quad \vec{\beta}_2 \quad \vec{\beta}_3 \quad \vec{\beta}_4).$

有三个4维行向量:

$$\underline{\vec{\alpha}_1} = (1, -1, 2, 3), \quad \underline{\vec{\alpha}_2} = (2, 5, 4, -1), \quad \underline{\vec{\alpha}_3} = (3, 0, 1, -2).$$

有四个3维列向量:

$$\underline{\vec{\beta}_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \underline{\vec{\beta}_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\vec{\beta}_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\vec{\beta}_4} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

矩阵与向量的关系:

矩阵



向量

- $A_{m \times n}$ 的行
- $A_{m \times n}$ 的列



- n 维行向量



- m 维列向量

特别地, 向量是特殊的矩阵:

- $1 \times n$ 型矩阵
- $n \times 1$ 型矩阵



- n 维行向量



- n 维列向量

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$$

2.2 n 维向量的简单关系

定义2 设有两个 n 维向量,

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \vec{\beta} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad \text{或} \quad \begin{aligned} \vec{\alpha} &= (a_1, a_2, \dots, a_n), \\ \vec{\beta} &= (b_1, b_2, \dots, b_n), \end{aligned}$$

“同型”向量

称 $\vec{\alpha}$ 与 $\vec{\beta}$ 是相等的向量 当且仅当 它们对应分量均相等, 即

分量逐位相等

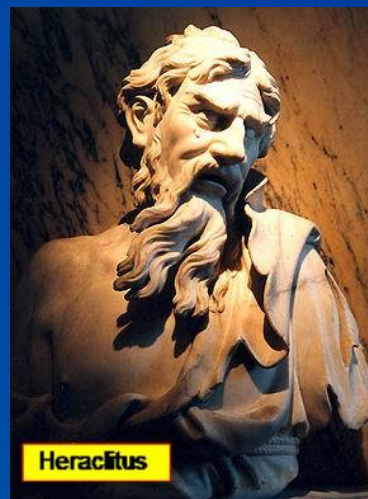
$$\vec{\alpha} = \vec{\beta} \Leftrightarrow a_i = b_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

例2 古希腊哲学家赫拉克利特的哲学命题 “人不能两次踏进同一条河流！”

数学解释：

在4维空间中，若 $t_1 \neq t_2$ ，则向量
 (t_1, x, y, z) \neq (t_2, x, y, z) .

举一反三：

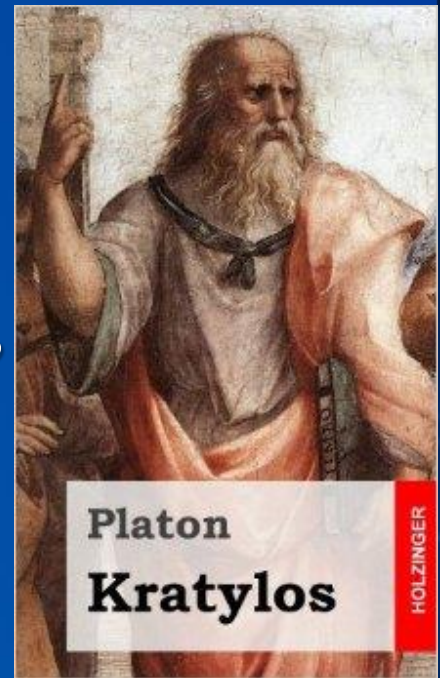


例2-续 赫拉克利特的学生克拉底鲁 (Kratylos) 进一步又提出了一个哲学命题:

“人一次也不能踏进同一条河流!”

思考: 如何用数学观点来解释这一命题?

提示: 考虑 (t, x, y, z) 与 $(t + \varepsilon, x, y, z)$,
其中 $\varepsilon > 0$ 为任意小的实数.



定义3 对 n 维列向量: $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, 和实数 $k \in \mathbb{R}$,

定义:

(1). 向量加法: $\vec{\alpha} + \vec{\beta} \triangleq \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$. (2). 向量数乘: $k\vec{\alpha} \triangleq \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ \vdots \\ ka_n \end{pmatrix}$.

(3). 向量转置: $\vec{\alpha}^T \triangleq (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $(\vec{\alpha}^T)^T \triangleq \vec{\alpha}$.

(4). 向量乘法: $\vec{\alpha}^T \vec{\beta} = \sum_{i=1}^n a_i b_i$; $\vec{\alpha} \vec{\beta}^T = (a_i b_j)_{n \times n}$.

问题:

- (1). 向量加法
- (2). 向量数乘
- (3). 向量转置
- (4). 向量乘法

运算是否**封闭**?



$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$$

定义3 对 n 维列向量: $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, 和实数 $k \in \mathbb{R}$,

定义:

(1). 向量加法: $\vec{\alpha} + \vec{\beta} \triangleq \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$. (2). 向量数乘: $k\vec{\alpha} \triangleq \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ \vdots \\ ka_n \end{pmatrix}$.

(3). 向量转置: $\vec{\alpha}^T \triangleq (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $(\vec{\alpha}^T)^T \triangleq \vec{\alpha}$. 

(4). 向量乘法: $\vec{\alpha}^T \vec{\beta} = \sum_{i=1}^n a_i b_i$;  $\vec{\alpha} \vec{\beta}^T = (a_i b_j)_{n \times n}$. 

问题:

- ✓ (1). 向量加法
- ✓ (2). 向量数乘
- (3). 向量转置
- (4). 向量乘法

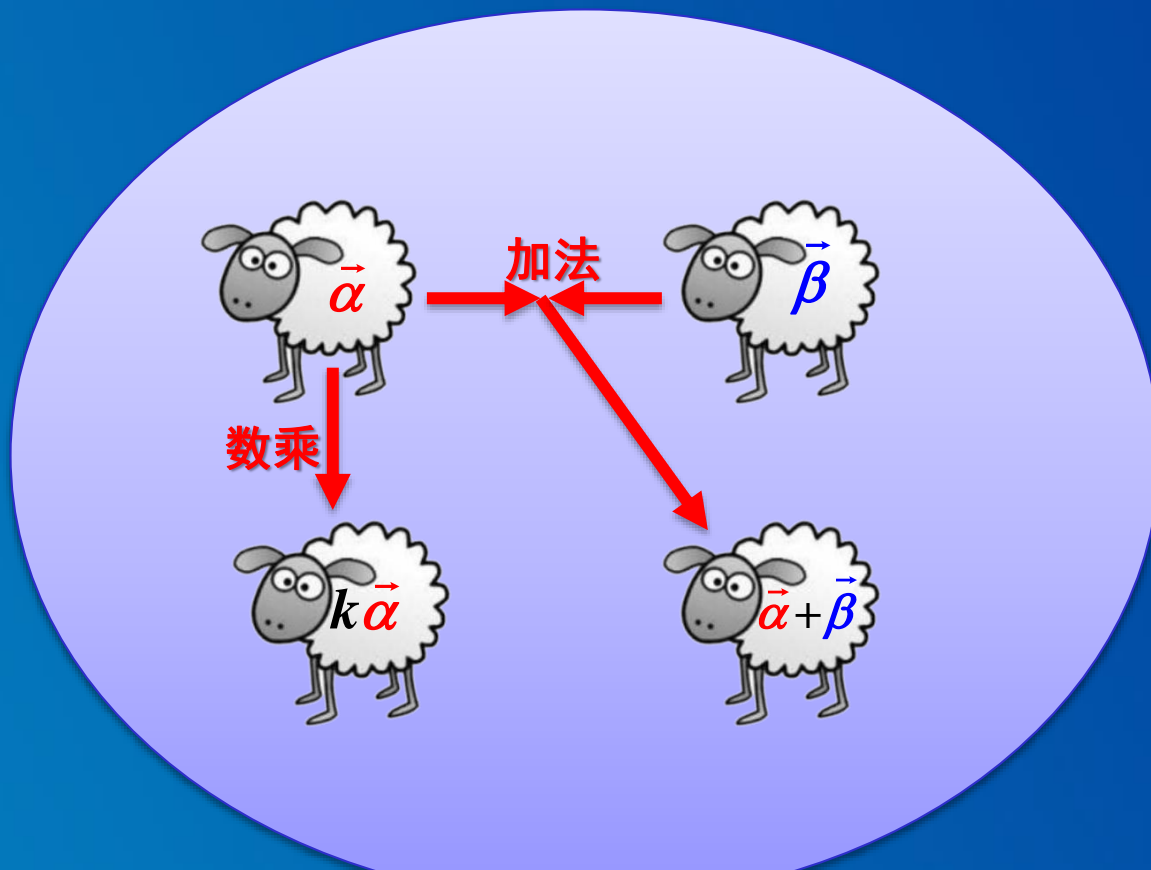
运算是否封闭?

向量加法
向量数乘

统称为向量的**线性运算**.

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$$

封闭性的讨论：“圈羊行动”



代数系统 = 集合+封闭运算

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$$

内容提要

1. 问题引入 —— 为什么要讨论 n 维空间？

2. 探究新知 —— n 维向量及其运算

3. 深入理解 n 维向量空间及其子空间

4. 总结拓展



$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$$

3.1 n 维向量空间

定义4 全体 n 维向量组成的集合, 当定义了向量的加法及数乘运算之后, 就称为 n 维向量空间 (vector space), 记作 \mathbb{R}^n .

$\mathbb{R}^n = (\{n \text{ 维向量}\}, \text{加法, 数乘})$ —— 代数系统

对任何 n 维向量 $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ 及任意数 $k, l \in \mathbb{R}$, 向量的加法及数乘满足下列的八条性质:

(1) $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\beta} + \vec{\alpha}$

(交换)

(2) $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma} = \vec{\alpha} + (\vec{\beta} + \vec{\gamma})$

(结合)

(3) $\vec{\alpha} + \mathbf{0} = \vec{\alpha},$

(零元)

(4) $\vec{\alpha} + (-\vec{\alpha}) = \mathbf{0},$

(逆元)

(5) $1 \cdot \vec{\alpha} = \vec{\alpha},$

(单位)

(6) $k(l\vec{\alpha}) = (kl)\vec{\alpha},$

(结合)

(7) $k(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = k\vec{\alpha} + k\vec{\beta},$

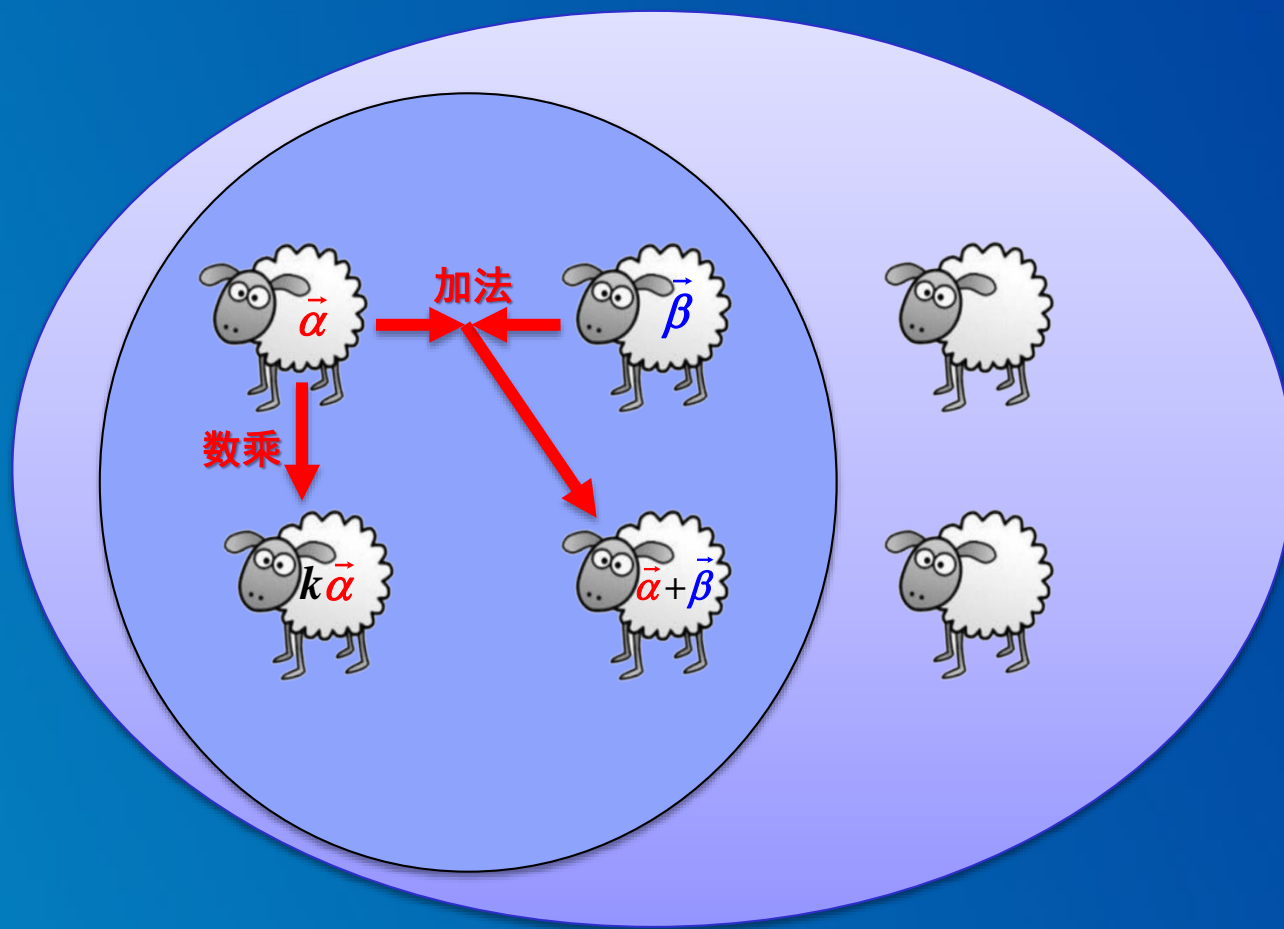
(两种

(8) $(k + l)\vec{\alpha} = k\vec{\alpha} + l\vec{\alpha}.$

分配)

$(x-p)+(y-q)=r$

“圈羊行动” (续)



$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$$

3.2 向量空间的子空间

定义5 设 W 是 \mathbb{R}^n 中的非空子集, 满足

- ① 对向量的加法是封闭的, 即: $\forall \vec{\alpha}, \vec{\beta} \in W$, 有 $\vec{\alpha} + \vec{\beta} \in W$.
- ② 对向量的数乘运算是封闭的, 即: $\forall \vec{\alpha} \in W, \forall k \in \mathbb{R}$, 有 $k\vec{\alpha} \in W$.

则称 W 是 \mathbb{R}^n 的**子空间**.

例3 由零向量一个元素组成的集合

$$V_0 = \{(0, 0, \dots, 0)^T\}$$

是 \mathbb{R}^n 的子空间，称为**零子空间**。

习题: 请决定 \mathbb{R}^3 中的所有子空间及其几何图形。

内容提要

1. 问题引入 —— 为什么要讨论 n 维空间？

2. 探究新知 —— n 维向量及其运算

3. 深入挖掘 —— n 维向量空间及其子空间

4. 总结拓展



本讲小结

元素

- n 维向量
(n 元有序数组)

集合

- n 维向量空间

关系

- 线性运算

结构

- 子空间



$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$$

{3维空间向量}

1:1对应



$\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) | x_i \in \mathbb{R}\}$

建立坐标系

推广



{n维空间向量}

$$\vec{\alpha} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3$$

推广



$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}\}$



● 几何方面：
很难做出图形

● 代数方面：
很容易推广到n元有序数组。

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$$

The image is a composite graphic. The top half shows a satellite in orbit around Earth, with a colorful, blurred background suggesting high-speed travel or a warp drive. The bottom right shows a silhouette of a person opening a white door, with a bright light emanating from the doorway. A blue banner with white text is overlaid on the bottom left.

**n 维空间的大门已经打开
驾驶你思维的自由舰
勇敢地驶入吧!**

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$$