全国高校数学微课程教学设计竞赛

知识点名称：n 维向量空间 (线性代数)

知识点编号：04010

内容提要

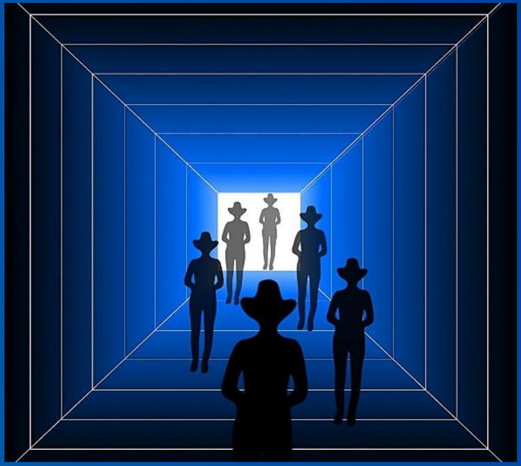
— 论 n 维空间？

1. 问题引入
2. 探究新知
3. 深入挖掘
4. 总结拓展

1. 问题的引入

- 思想实验：

井底之蛙 ⟶ 平面之蛙 ⟶ 三维空间中的我们



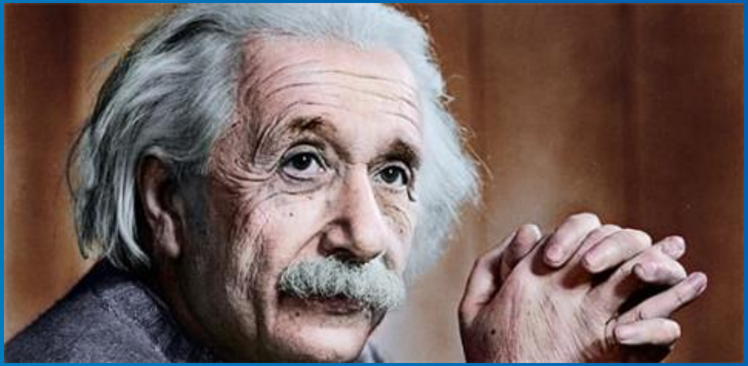
- 认知4维空间：

  - 古希腊哲学家赫拉克利特(Heraclitus)

“人不能两次踏进同一条河流！”

- 认知4维空间：

- 物理学大师爱因斯坦 (A. Einstein)



"相对论"中的4维世界观

→

- 物理学大师霍金 (S. Hawking) 等

11维的宇宙模型

● 思想实验 (续)：认知更高维的空间是否容易?

莫比乌斯带:

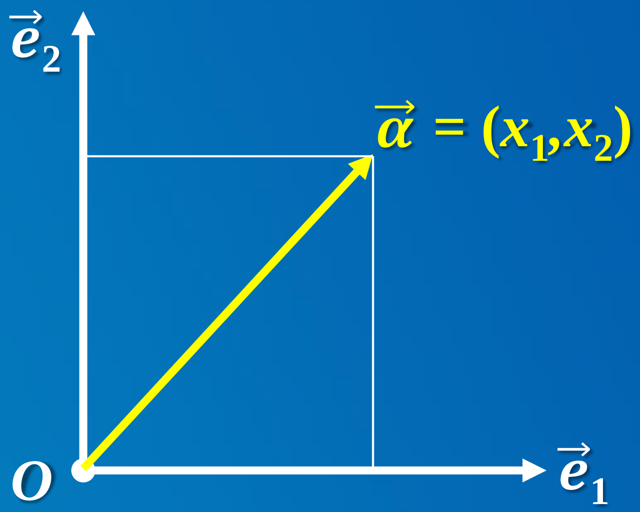
2维对象在3维空间中扭曲所得.

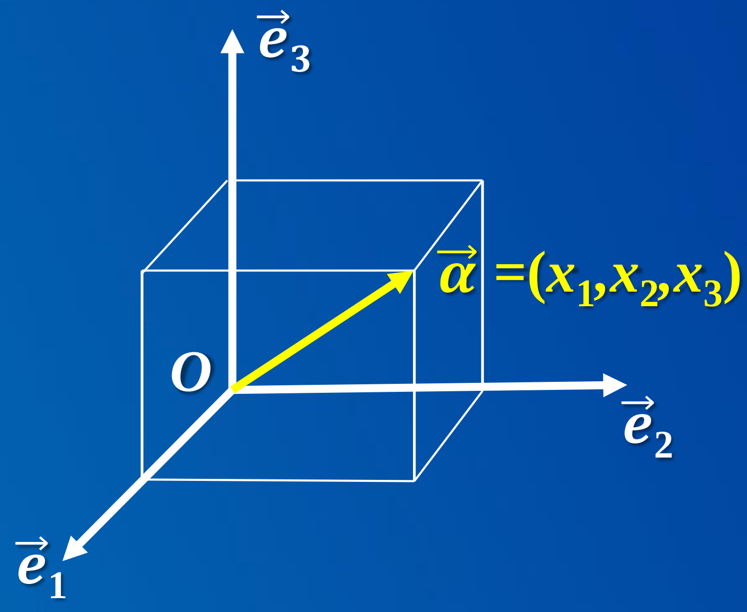
(实际道具展示)

(电影<星级穿越>图片)

面对神秘的高维空间，我们真的就一筹莫展了吗?

复习: 二维, 三维空间的表示方法





复习: 二维, 三维空间的表示方法

{3维空间向量} $\xleftrightarrow[\text{建立坐标系}]{\text{1:1对应}}$ $\mathbb{R}^3=\{(x_1,x_2,x_3)|x_i\in\mathbb{R}\}$

$$\vec{\alpha}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+x_3\vec{e}_3$$

推广 ↓　　　　推广 ↓

{n维空间向量} $\longleftrightarrow$ $\mathbb{R}^n=\{(x_1,\cdots,x_n)|x_i\in\mathbb{R}\}$

- **几何方面:**
  很难做出图形
- **代数方面:**
  很容易推广到n元有序数组.

内容提要

1. 问题引入 ——为什么要讨论 n 维空间？

2. 探究新知

—— n 维向量及其运算

3. 深入挖掘

4. 总结拓展

2.1 n 维向量的概念

定义1 设 $\mathbb{R}$ 是实数集, n 个数 $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, 组成的有序数组 $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 称为 n **维向量**, 记作

$$\vec{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \quad \text{或} \quad \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

其中 a_i 称为向量的第 i 个**分量**. 前一个表达式称为**行向量**, 后一个称为**列向量**. 一般用带箭头的字母表示一个向量，且默认为列向量.

如果向量的所有分量都是0，就称其为**零向量**，一般记作 $\vec{0}$.

例1 矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 3\\ 2 & 5 & 4 & -1\\ 3 & 0 & 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{\alpha}_1\\ \vec{\alpha}_2\\ \vec{\alpha}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{\beta}_1 & \vec{\beta}_2 & \vec{\beta}_3 & \vec{\beta}_4\end{pmatrix}.$

有三个4维行向量:

$$\vec{\alpha}_1=(1,-1,2,3),\quad \vec{\alpha}_2=(2,5,4,-1),\quad \vec{\alpha}_3=(3,0,1,-2).$$

有四个3维列向量:

$$\vec{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\quad \vec{\beta}_2=\begin{pmatrix}-1\\5\\0\end{pmatrix},\quad \vec{\beta}_3=\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix},\quad \vec{\beta}_4=\begin{pmatrix}3\\-1\\-2\end{pmatrix}.$$

矩阵与向量的关系:

矩 阵	⟷	向 量
$A_{m\times n}$的行	⟷	n维行向量
$A_{m\times n}$的列	⟷	m维列向量

特别地, 向量是特殊的矩阵:

$1\times n$型矩阵	⟷	n维行向量
$n\times 1$型矩阵	⟷	n维列向量

2.2 n 维向量的简单关系

定义2 设有两个 n 维向量，

“同型”向量

$$\vec{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix},\quad \vec{\beta}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix},\quad \text{或}\quad \begin{array}{l}\vec{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n),\\ \vec{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n),\end{array}$$

称$\vec{\alpha}$与$\vec{\beta}$是相等的向量 当且仅当 它们对应分量均相等，即

分量逐位相等

$$\vec{\alpha}=\vec{\beta}\quad\Leftrightarrow\quad a_i=b_i,\quad (i=1,2,\cdots,n)$$

例2 古希腊哲学家赫拉克利特的哲学命题

"人不能两次踏进同一条河流！"

数学解释：

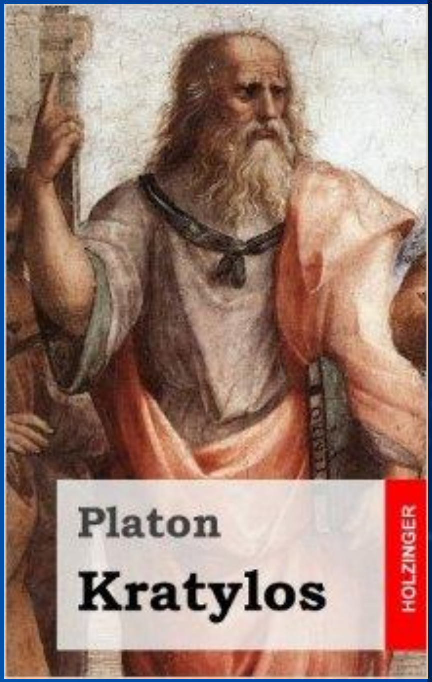
在4维空间中，若 $t_1 \neq t_2$，则向量

$$(t_1, x, y, z) \neq (t_2, x, y, z).$$

举一反三：

例2-续　赫拉克利特的学生克拉底鲁 (Kratylos) 进一步又提出了一个哲学命题:

“人一次也不能踏进同一条河流！”



思考: 如何用数学观点来解释这一命题?

提示: 考虑 $\underline{(t, x, y, z)}$ 与 $\underline{(t+\varepsilon, x, y, z)}$,

其中$\varepsilon > 0$为任意小的实数.

定义3 对 n 维列向量：$\vec{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$，$\vec{\beta}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$，和实数 $k\in\mathbb{R}$，

定义：

(1). 向量加法： $\vec{\alpha}+\vec{\beta}\triangleq\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\\vdots\\a_n+b_n\end{pmatrix}$. **(2). 向量数乘：** $k\vec{\alpha}\triangleq\begin{pmatrix}ka_1\\ka_2\\\vdots\\ka_n\end{pmatrix}$.

(3). 向量转置： $\vec{\alpha}^{\mathrm{T}}\triangleq(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$(\vec{\alpha}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\triangleq\vec{\alpha}$.

(4). 向量乘法： $\vec{\alpha}^{\mathrm{T}}\vec{\beta}=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$；$\vec{\alpha}\vec{\beta}^{\mathrm{T}}=\left(a_ib_j\right)_{n\times n}$.

问题:

(1). 向量加法

(2). 向量数乘

(3). 向量转置

(4). 向量乘法

运算是否封闭?

定义3 对 n 维列向量：$\vec{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$，$\vec{\beta}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$，和实数 $k\in\mathbb{R}$，

定义：

(1). 向量加法： $\vec{\alpha}+\vec{\beta}\triangleq\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\\vdots\\a_n+b_n\end{pmatrix}$. **(2). 向量数乘：** $k\vec{\alpha}\triangleq\begin{pmatrix}ka_1\\ka_2\\\vdots\\ka_n\end{pmatrix}$.

(3). 向量转置： $\vec{\alpha}^{\mathrm{T}}\triangleq(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$(\vec{\alpha}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\triangleq\vec{\alpha}$.

(4). 向量乘法： $\vec{\alpha}^{\mathrm{T}}\vec{\beta}=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$; $\vec{\alpha}\vec{\beta}^{\mathrm{T}}=\left(a_ib_j\right)_{n\times n}$.

问题:

√ (1). 向量加法

√ (2). 向量数乘

(3). 向量转置

(4). 向量乘法

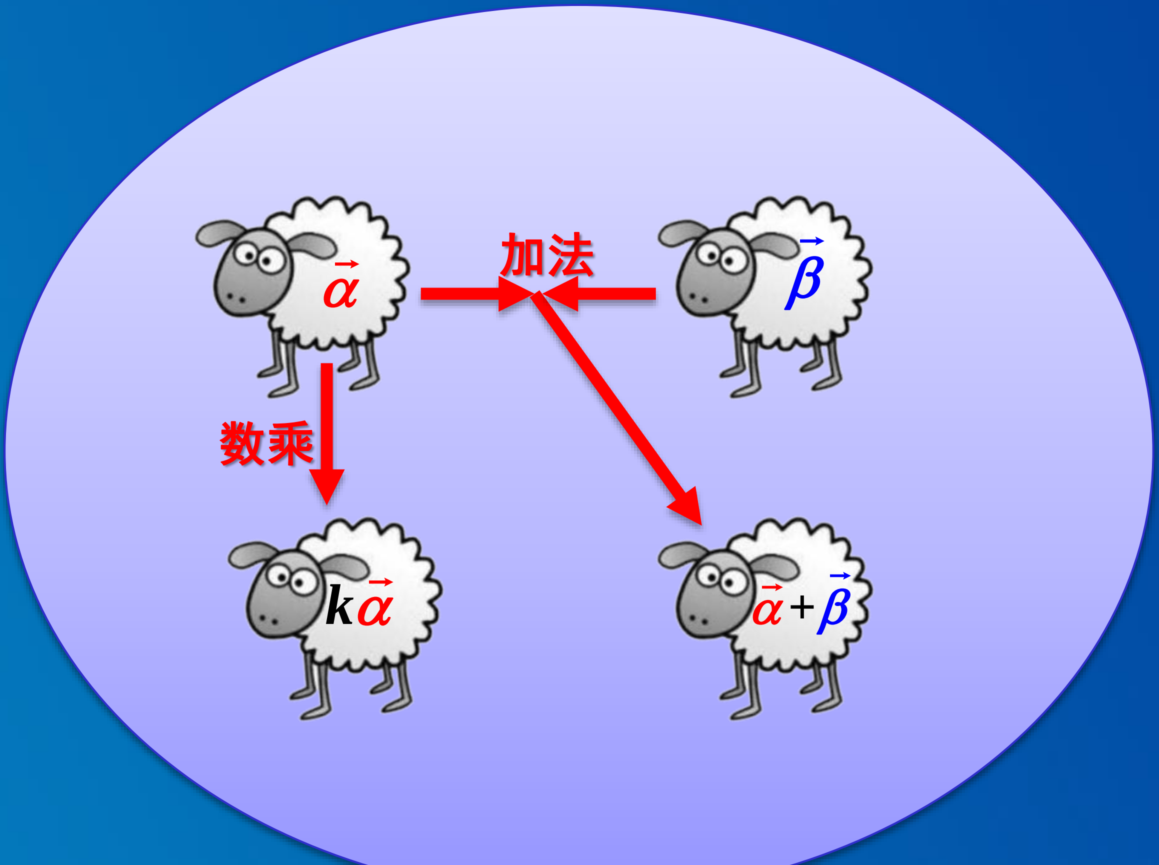
运算是否封闭?

向量加法

向量数乘

统称为向量的**线性运算**.

封闭性的讨论: “圈羊行动”



代数系统 = 集合+封闭运算

内容提要

1. 问题引入 —— 为什么要讨论 n 维空间？

2. 探究新知 —— n 维向量及其运算

3. 深入 —— n 维向量空间及其子空间

4. 总结拓展

3.1 n 维向量空间

定义4 全体 n 维向量组成的集合，当定义了向量的加法及数乘运算之后，就称为 n **维向量空间** (vector space), 记作 $\mathbb{R}^n$.

$$\mathbb{R}^n = \left(\{n\ \text{维向量}\}, \text{加法}, \text{数乘}\right) \text{——— 代数系统}$$

对任何 n 维向量 $\vec{\alpha}, \overrightarrow{\beta}, \vec{\gamma}$ 及任意数 $k, l \in \mathbb{R}$, 向量的加法及数乘满足下列的八条性质:

(1) $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\vec{\beta}+\vec{\alpha}$ (交换)

(2) $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma}=\alpha+(\vec{\beta}+\vec{\gamma})$ (结合)

(3) $\vec{\alpha}+0=\vec{\alpha}$, (零元)

(4) $\vec{\alpha}+(-\vec{\alpha})=0$, (逆元)

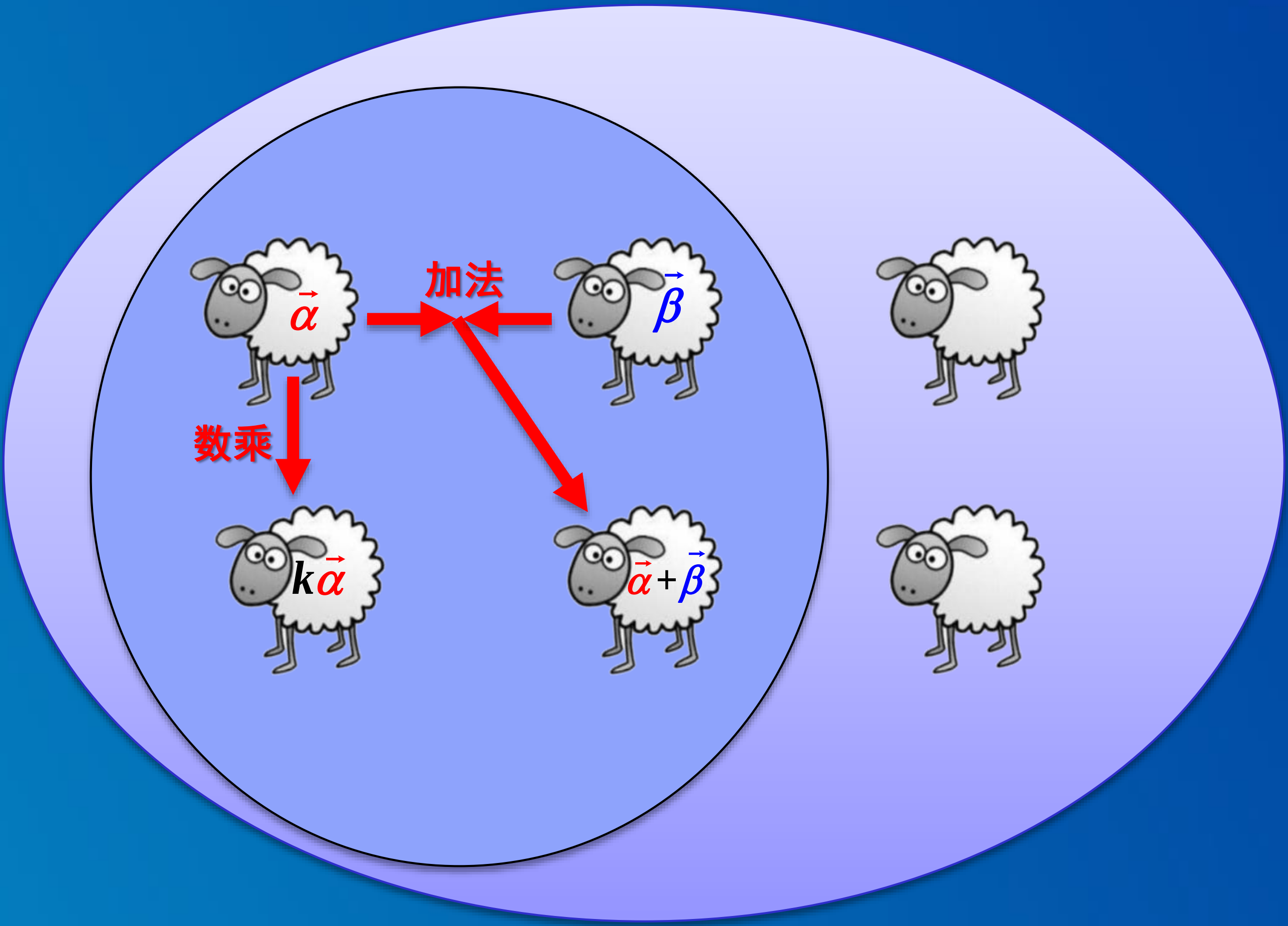
(5) $1 \cdot \vec{\alpha}=\vec{\alpha}$, (单位)

(6) $k(l\vec{\alpha})=(kl)\vec{\alpha}$, (结合)

(7) $k(\vec{\alpha}+\vec{\beta})=k\vec{\alpha}+k\vec{\beta}$, (两种

(8) $(k+l)\vec{\alpha}=k\vec{\alpha}+l\vec{\alpha}$. 分配)

“圈羊行动” (续)



3.2 向量空间的子空间

定义5 设W是$\mathbb{R}^n$中的非空子集合，满足

①对向量的加法是封闭的，即：$\forall\vec{\alpha},\vec{\beta}\in W$,有$\vec{\alpha}+\vec{\beta}\in W$.

②对向量的数乘运算是封闭的，即：$\forall\vec{\alpha}\in W,\forall k\in\mathbb{R}$, 有 $k\vec{\alpha}\in W$.

则称W是$\mathbb{R}^n$的子空间.

例3 由零向量一个元素组成的集合

$$\boldsymbol{V}_0 = \{(0, 0, \dots, 0)^{\mathrm{T}}\}$$

是$\mathbb{R}^n$的子空间，称为**零子空间**.

习题: 请决定$\mathbb{R}^3$中的所有子空间及其几何图形.

内容提要

1. 问题引入 —— 为什么要讨论 n 维空间？

2. 探究新知 —— n 维向量及其运算

3. 深入挖掘 —— n 维向量空间及其子空间

4. 总结拓展

本讲小结

元素	• n 维向量 (n元有序数组)
集合	• n 维向量空间
关系	• 线性运算
结构	• 子空间

{3维空间向量} $\xleftrightarrow[\text{建立坐标系}]{\text{1:1对应}}$ $\mathbb{R}^3=\{(x_1,x_2,x_3)|x_i\in\mathbb{R}\}$

$$\boxed{\vec{\alpha}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+x_3\vec{e}_3}$$

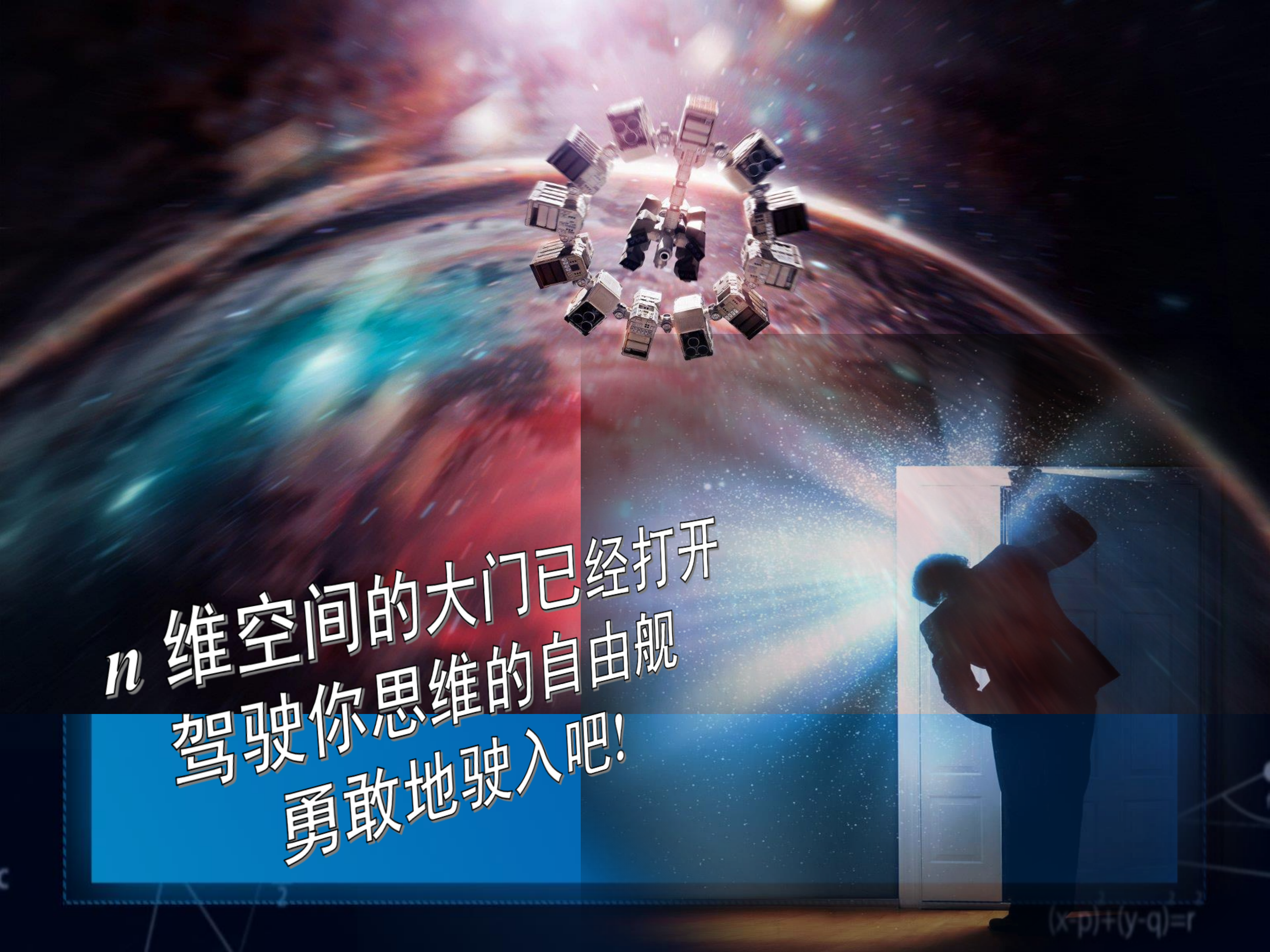
推广 $\downarrow$ 　　　　　　　　推广 $\downarrow$

{n维空间向量} $\longleftrightarrow$ $\mathbb{R}^n=\{(x_1,\cdots,x_n)|x_i\in\mathbb{R}\}$

?

- **几何方面：**
  很难做出图形

- **代数方面：**
  很容易推广到n元有序数组.


n 维空间的大门已经打开
驾驶你思维的自由舰
勇敢地驶入吧!
(x-p)+(y-q)=r